Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 192-198

© **В.Е. МОСЯГИН, Н.А. ШВЕМЛЕР**
Тюменский государственный университет
vmosyagin@mail.ru, shvemler.natalya@mail.ru

УДК 517.37; 519. 213. 2

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПРИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ИНТЕГРАЛАМ МЕНЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

PROBABILISTIC TECHNIQUE OF MULTIPLE INTEGRALS TRANSFORMATION INTO INTEGRALS OF LOWER DIMENSION

АННОТАЦИЯ. В статье излагается прием понижения размерности кратных интегралов. Основная идея состоит в возможности представления кратного интеграла в виде математического ожидания (интеграла Лебега) относительно подходящего абсолютно непрерывного вероятностного распределения. Такое представление позволяет использовать в теории интегрирования вероятностное понятие независимости случайных величин. Это также дает возможность применить теорему о замене переменных в интеграле Лебега, которая преобразует абстрактный интеграл в интеграл по числовой прямой.

SUMMARY. The article describes the dimensionality reduction technique of multiple integrals. The basic idea is that the representation a multiple integral as the expectation (Lebesgue integral) with respect to a suitable absolutely continuous probability distribution is possible. This representation allows us to use the probability concept of independence random variables in the integration theory. It also allows to apply the change-of-variables theorem in the Lebesgue integral that transforms an abstract integral to the integral over the real line.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Кратные интегралы, замена переменных в интеграле Лебега, классические вероятностные распределения.

KEY WORDS. Multiple integrals, change-of-variables theorem for Lebesgue integral, classical probability distributions.

§1. Замена переменных в интеграле Лебега.

Пусть $(\xi_1,...,\xi_n)$ — случайный вектор с совместным распределением $F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)$, а $\varphi(x_1,...,x_n)$ числовая борелевская функция n переменных. Тогда математическое ожидание случайной величины $\xi = \varphi(\xi_1,...,\xi_n)$ выражается интегралом Лебега-Стилтьеса:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,...,x_n)\, dF_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)\,. \qquad (1)$$

С другой стороны, (1) представимо одномерным интегралом:

$$\mathbf{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_{\xi}(x), \tag{2}$$

где $F_{\xi}(x)$ — функция распределения величины ξ. Таким образом, справедлива формула понижения размерности кратного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,\dots,x_n) dF_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \cdot \tag{3}$$

Равенство интегралов в (3), по сути, является результатом замены переменных $x = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ в левом интеграле [1; 76], [2; 202].

Если $\mathbf{h} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — борелевская функция, то из (3) вытекает следующая формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(\varphi(x_1,\dots,x_n))\, dF_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dF_{\xi}(x)\,. \tag{4}$$

Для вектора $(\xi_1,\dots,\xi_n)$, имеющего абсолютно непрерывное распределение с плотностью $F'_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)$, равенство (4) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(\varphi(x_1,\dots,x_n)) f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{\xi}(x)\, dx \tag{5}$$

где $f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$ — плотность распределения $F_{\xi}(x)$.

Пусть $\mathbf{g(x,\ y)}$ — числовая борелевская функция двух переменных, а $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ и $\psi(x_1,\dots,x_n)$ — борелевские функции, действующие из $\mathbf{R^n}$ в $\mathbf{R}$. Тогда математическое ожидание случайной величины $g(\varphi(\xi_1,\dots,\xi_n),\psi(\xi_1,\dots,\xi_n))$, так же как и выше, можно представить двумя способами и в результате получить аналог формулы (5):

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\varphi(x_1,\dots,x_n),\psi(x_1,\dots,x_n)) f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y) dx dy\end{gathered} \tag{6}$$

где $f_{\xi,\eta}(x,y)$ обозначает плотность совместного распределения величин $\xi = \varphi(\xi_1,\dots,\xi_n)$ и $\eta = \psi(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Здесь, как и выше, можно считать, что правый интеграл в (6) получается из левого заменой переменных $x = \varphi(x_1,\dots,x_n)$ и $y = \psi(x_1,\dots,x_n)$.

В следующем параграфе мы продемонстрируем на конкретных примерах технику понижения размерности кратных интегралов.

§2. Примеры понижения размерности кратных интегралов

Утверждение 1. Справедливо равенство:

$$\int_a^b \dots \int_a^b h(\max\{x_1,\dots,x_n\})dx_1\dots dx_n = n\int_a^b h(x)(x-a)^{n-1}dx \tag{7}$$

► Представим интеграл в левой части (7) в виде математического ожидания

$$\int_a^b \dots \int_a^b h(\max\{x_1,\dots,x_n\})dx_1\dots dx_n =$$
$$= (b-a)^n \int_a^b \dots \int_a^b h(\max\{x_1,\dots,x_n\}) f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \tag{8}$$

относительно равномерного в n-мерном кубе $[a,b]^n$ распределения с плотностью

$$f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}, \quad x_1,\dots,x_n \in [a,b]. \tag{9}$$

Из (8) и (5) получим равенство:

$$\int_a^b \dots \int_a^b h(\max\{x_1,\dots,x_n\})dx_1\dots dx_n = (b-a)^n \int_a^b h(x) f_\xi(x)dx, \tag{10}$$

где $\xi = \max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$. Так как компоненты вектора $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ с равномерным распределением в кубе $[a,b]^n$ независимы и распределены равномерно на интервале $[a,b]$, то легко находится функция распределения величины ξ:

$$F_\xi(x) = P(\max\{\xi_1,\dots,\xi_n\} < x) = P^n(\xi_1 < x) = \frac{(x-a)^n}{(b-a)^n}, \quad x \in [a.b]$$

и ее плотность

$$f_\xi(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}, \quad x \in [a,b] \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), приходим к формуле (7) ◄

Следствие. Полагая в (7) $h(x) = x$, находим интеграл

$$\int_a^b \dots \int_a^b \max\{x_1,\dots,x_n\}dx_1\dots dx_n = n\int_a^b x(x-a)^{n-1}dx = \frac{(nb+a)(b-a)^n}{n+1}. \tag{12}$$

Утверждение 2. Справедливо равенство:

$$\int_a^b \ldots \int_a^b h(\min\{x_1,\ldots,x_n\})dx_1\ldots dx_n = n\int_a^b h(x)(b-x)^{n-1}dx\,. \tag{13}$$

В частности,

$$\int_a^b \ldots \int_a^b \min\{x_1,\ldots,x_n\}dx_1\ldots dx_n = n\int_a^b x(b-x)^{n-1}dx = \frac{(b+na)(b-a)^n}{n+1} \tag{14}$$

► Для доказательства формул (13-14) достаточно повторить доказательство утверждения 1 и его следствия для распределения случайной величины $\xi = \min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$:

$$F_\xi(x) = P(\min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\} < x) = 1 - P(\min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\} \ge x) = 1 - P^n(\xi_1 \ge x) = 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n,$$

$$f_\xi(x) = \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}, \qquad x \in [a,b] \ ◄$$

Утверждение 3. Справедливо равенство:

$$\int_a^b \ldots \int_a^b g(\min\{x_1,\ldots,x_n\},\max\{x_1,\ldots,x_n\})dx_1\ldots dx_n = n(n-1)\int_a^b dx\int_x^b g(x,y)(y-x)^{n-2}dy\,.$$

► Найдем совместную плотность распределения случайных величин $\xi = \min\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, $\eta = \max\{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$, где вектор $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ имеет распределение (9). Так как при $a \le x \le y \le b$ [3; 18]

$$P(\xi \in dx; \eta \in dy) = n(n-1)\frac{dx}{(b-a)}\frac{dy}{(b-a)}\left(\frac{y-x}{b-a}\right)^{n-2},$$

то совместная плотность вектора (ξ,η) запишется в виде:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = n(n-1)\frac{(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n}, \quad a \le x \le y \le b\,.$$

Равенство (15) является следствием (6), (9) и последней формулы ◄

Утверждение 4. Если $\int_0^\infty |h(x)|x^{n-1}dx < \infty$, то имеет место формула понижения размерности:

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h\left(x_1 + \ldots + x_n\right)dx_1\ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty h(x)x^{n-1}dx$$

► Если независимые величины $\xi_1,...,\xi_n$ распределены по экспоненциальному закону с параметром 1, то их совместная плотность равна

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = e^{-(x_1+...+x_n)}, \quad x_i \ge 0,\ i = 1,...,n,$$

а сумма $\xi = \xi_1 + ... + \xi_n$ имеет гамма-распределение с плотностью:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x}, \quad x \ge 0.$$

Отсюда и из (5) приходим к (16):

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty h(x_1 + ... + x_n)\, dx_1 ... dx_n =$$

$$= \int_0^\infty ... \int_0^\infty h(x_1 + ... + x_n)\, e^{x_1+...+x_n} f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n)\, dx_1...dx_n =$$

$$= \int_0^\infty h(x) e^x f_\xi(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty h(x) x^{n-1}\, dx \quad ◄$$

Утверждение 5. Если $\int_0^\infty |h(x)| x^{n/2-1} dx < \infty$, то справедлива формула понижения размерности:

$$\int_0^\infty ... \int_0^\infty h\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right) dx_1 ... dx_n = \frac{\left(\sqrt{\pi}/2\right)^n}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty h(x) x^{n/2-1} dx. \tag{17}$$

► Пусть вектор $(\xi_1,...,\xi_n)$ состоит из независимых величин со стандартным нормальным распределением и $\xi = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$. Тогда совместная плотность вектора равна

$$f_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1,...,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(x_1^2+...+x_n^2)/2},$$

а величина ξ имеет гамма-распределение с параметрами $(1/2,\ n/2)$:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, x^{n/2-1}\, e^{-x/2},\ \ x > 0\,.$$

Отсюда и из (5) приходим к (17):

$$\int_0^{\infty}\!\!\dots\!\int_0^{\infty} h\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right) dx_1 \dots dx_n =$$

$$= (2\pi)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right) e^{(x_1^2+\dots+x_n^2)/2} \cdot f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1,\dots,x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} h(x)\, e^{x/2} f_{\xi}(x) dx = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} h(x)\, x^{n/2-1} dx \ \blacktriangleleft$$

Замечание. В утверждениях 4-5 подбором функции $\mathbf{h(x)}$ можно изменить область интегрирования. Например, объем $\mathbf{V_n}$ n-мерного шара радиуса R

$$V_n = \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \le R^2} \!\!\dots\! \int dx_1 \dots dx_n$$

выражается левым интегралом (17) с функцией

$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le R^2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Применяя формулу (17), моментально приходим к известной формуле:

$$V_n = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma(n/2)} \int_0^{R^2} x^{n/2-1} dx = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n R^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n R^n}{\Gamma(n/2+1)}\,.$$

В частности, $V_3 = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

В заключение отметим, что описанный в работе вероятностный прием понижения размерности кратных интегралов и доказанные утверждения (примеры) следует рассматривать только как иллюстративный материал, а саму идею можно развивать в разных направлениях.

Полученные в статье простые формулы удобны при анализе сходимости кратных интегралов, при получении рекуррентных формул и выявлении закономерностей, а также для нахождения распределений последовательности сумм независимых случайных величин.

Заметим также, что подобных формул нет в известном справочнике [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Наука, 1986. 432 с.
2. Ширяев А.Н. Вероятность. М., Наука, 1989. 640 с.
3. Дейвид Г. Порядковые статистики. М., Наука, 1979. 336 с.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. М., Наука, 1981. 800 с.

REFERENCES

1. Borovkov, A.A. *Teoriia veroiatnostei* [Probability theory. Vol. 1]. Moscow: Nauka, 1986. 432 p. (in Russian).
2. Shiriaev, A.N. *Veroiatnost'* [Probability]. Moscow: Nauka, 1989. 640 p. (in Russian).
3. Deivid, G. *Poriadkovye statistiki* [Order statistics] / Transl. fr. Eng. by V.A. Egorov, V.B. Nevzorov. Moscow: Nauka, 1979. 336 p. (in Russian).
4. Prudnikov, A.P., Brychkov, Iu.A., Marichev, O.I. *Integraly i riady. T. 1. Elementarnye funktsii* [Integrals and series. Vol. 1. Elementary Functions]. Moscow: Nauka, 1981. 800 p. (in Russian).

Авторы публикации

Мосягин Вячеслав Евгеньевич — доцент кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, кандидат физико-математических наук

Швемлер Наталья Александровна — аспирант кафедры математического анализа и теории функций Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета

Authors of the publication

Vyacheslav E. Mosyagin — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Analysis and Function's Theory, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University

Natalya A. Shvemler — Post-graduate student, Department of Mathematical Analysis and Functions Theory, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University